Den mathematiske Classe.

Rækker, hvis Led ere Producter af Ledene i tvende eller flere andre Rækker, hvis Summer (*fonctions génératrices*) man kjender, forekomme hyppigt i Analysen. Til at fremstille de Functioner, hvis Udviklinger de ere, tjener, som bekjendt, det Parsevalske Theorem, (*Mém. prés. à l'institut par div. Savans.* 1-638), hvis Anvendelse ved de deri indbefattede bestemte Integraler medförer betydelige Vanskeligheder. I et meget specielt Tilfælde, naar nemlig den ene Række har constante Differentser i en hvilkensomhelst Orden, giver et Theorem af *Euler* (i hans "Differenzialrechnung" 2-33, *Michelsens* Overs.) umiddelbart det sögte Udtryk. Herunder kan nu ogsaa det Tilfælde ansees indbefattet, at den ene givne Række er recurrent, skjönt Formlerne da ville blive noget vidtlöftige.

Hr. Cand. Jur. og Fuldmægtig i Admiralitetets Casserercomptoir *Jürgensen* har meddeelt Selskabet en Afhandling, hvori han har opstillet en Læresætning for sidste Tilfælde:

$\Pi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. være en hvilkensomhelst Function, som kan udvikles efter hele og positive Potenser af x. Hvis man multiplicerer den Led for Led med Coefficienterne i Udviklingen af den ægte rationale Brök

$$\frac{\varphi x}{(1-px)^{\alpha+1}.(1-qx)^{\beta+1}.(1-rx)^{\gamma+1}\ldots\&c.}$$ og benævner

$$\frac{\varphi x}{(1-qx)^{\beta+1}(1-rx)^{\gamma+1}\ldots\&c.}$$ med ψx, $$\frac{\varphi x}{(1-px)^{\alpha+1}(1-rx)^{\gamma+1}\ldots\&c.}$$ med χx,

$$\frac{\varphi x}{(1-px)^{\alpha+1}.(1-qx)^{\beta+1}\ldots\&c.}$$ med ξx, saa er den fremkomne Række

$$S = \frac{d^{\alpha}\left(p^{\alpha}\psi\left(\frac{1}{p}\right)\Pi(px)\right)}{1.2.3\ldots\alpha\, dp^{\alpha}} + \frac{d^{\beta}\left(q^{\beta}\chi\left(\frac{1}{q}\right)\Pi(qx)\right)}{1.2.3\ldots\beta\, dq^{\beta}} + \frac{d^{\gamma}\left(r^{\gamma}\xi\left(\frac{1}{r}\right)\Pi(rx)\right)}{1.2.3\ldots\gamma.dr^{\gamma}} + \&c.\ldots(1.)$$

hvilken Formel har saamange Led, som der ere Factorer i Brökens Nævner.

Af dette Theorem har han uddraget adskillige Corollarier hvoraf fölgende ere de vigtigste:

1) Er den givne recurrente Række Udviklingen af den ægte Brök $\frac{\varphi x}{(1-px)^{\alpha+1}}$ saa före Coefficienterne til Potenserne af px til constante Differentser og den *Eulerske* Formel reduceres til

$$S = \frac{d^{\alpha}\left(p^{\alpha}\psi\left(\frac{1}{p}\right)\Pi(px)\right)}{1.2.3\ldots\alpha\, dp^{\alpha}}$$

i det $p=1$ efter Differentiationen.

2) Multipliceres Coefficienterne i Udviklingen af den rationale Brök Led for Led med Udviklingen af $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \&c.$, saa fremkommer hiin Brök selv. Fölgelig, da de angivne Differentialer i Formelen (1.) ere tagne med Hensyn paa p, q, o. s. v. saa vil man, i det $\Pi(x)$ antages $= \frac{1}{1-x}$ let ved at differentiere med Hensyn til x og sætte $x = o$, udlede det almindelige Led i enhver recurrent Række, og ligeledes, ved at antage $\Pi(x) =$ en hvilkensomhelst Function, det almindelige Led for en Række, hvis Led ere Producter af en given og en recurrent Rækkes Led udtrykt ved det almindelige Led af den givne.

3) Ved at antage $\Pi(x) = \frac{1}{1-x}$ decomponeres den givne rationale Brök saaledes:

$$\frac{\varphi x}{(1-px)^{\alpha+1}(1-qx)^{\beta+1}\ldots\&c.} = \frac{d^{\alpha}\left(p^{\alpha}\psi\left(\frac{1}{p}\right)\frac{1}{1-px}\right)}{1.2.3\ldots\alpha\, dp^{\alpha}} + \frac{d^{\beta}\left(q^{\beta}\chi\left(\frac{1}{q}\right)\frac{1}{1-qx}\right)}{1.2.3\ldots\beta\, dq^{\beta}} + \&c.$$

hvoraf ved Integration med Hensyn til x

$$\int \frac{\phi x . dx}{(1-px)^{\alpha+1}\,(1-qx)^{\beta+1}\ldots\&c.} = \frac{d^{\alpha}\left(p^{\alpha-1}\psi\left(\frac{1}{p}\right)\log\frac{P}{1-px}\right)}{1.2.3\ldots\alpha\, dp^{\alpha}} + \frac{d^{\beta}\left(q^{\beta-1}\chi\left(\frac{1}{q}\right)\log\frac{Q}{1-qx}\right)}{1.2.3\ldots\beta\, dq^{\beta}} + \&c.$$

som altsaa er en almindelig Integrationsformel for alle rationale ægte brudne Functioner. P, Q o. s. v. ere vilkaarlige Functioner af p, q. o. s. v.

De ovenangivne Resultater have en saadan Form med Hensyn til de deri indgaaende Störrelser α, β, o. s. v., at den Tanke frembyder sig af sig selv, ved en Interpolation af Functionen $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ betragtet som Function af n, at udvide dem til det Tilfælde, at α, β, o. s. v. ikke ere hele og positive Tal.

Da Udtrykket $\frac{d^n(W.V)}{d\nu^n} = W\frac{d^n V}{d\nu^n} + \frac{n}{1}W'\frac{d^{n-1}V}{d\nu^{n-1}} + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}W''\frac{d^{n-2}V}{d\nu^{n-2}} + \&c.$ i det W og V ere Functioner af V, gjelder for alle hele positive og negative Værdier af n (*Lacroix Calc. diff. et int.* 3-356.), saa defineres $\frac{d^n(WV)}{d\nu^n}$ med bruden Exponent ved $\frac{d^n V}{d\nu^n}$, $\frac{d^{n-1}V}{d\nu^{n-1}}$ &c. i det n er bruden.

Man kan nu vælge V efter Behag og behöver blot at give $\frac{d^n V}{d\nu^n}$ en saadan Betydning, at den svarer til det eengang givne, naar n er et heelt Tal. Antages saaledes f. Ex. $V = \nu^n$ og anvendes den af *Euler* (*Lacroix Calc. diff. et int.* 3-409) angivne Definition paa $\frac{d^n \nu^m}{d\nu^n}$ saa har man for alle positive Værdier af n

$$\frac{d^n(W\nu^n)}{d\nu^n} = [n]^n \left\{ W + \frac{n}{1} W' \frac{\nu}{1} + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} W'' \frac{\nu^2}{1.2} + \&c. \right\}$$

(hvor $[n]^n$ efter *Vandermondes* Betegnelse betyder Værdien af 1.2.3...n)

$$\text{eller } \frac{d^n(W\nu^n)}{1.2.3\ldots n\, d\nu^n} = W + \frac{n}{1} W' \frac{\nu}{1} + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} W'' \frac{\nu^2}{1.2} + \&c.$$

Det sees let, at dette Udtryk, der ikke indeholder n som Exponent, er skikket til Interpolation. Imidlertid er endnu det Spörgsmaal tilbage, hvorpaa Formlens Anvendelighed i det ovenomtalte Tilfælde beroer, om de Udviklinger, som dette Udtryk giver, svare til de Udviklinger, man paa andre Veie vilde finde af de opgivne Functioner. Dette er Tilfældet, naar den givne Bröks Nævner har Formen $(1-px)^{\alpha+1}$; men i andre Tilfælde har han endnu ingen fyldestgjörende Resultater i denne Henseende.

Forsaavidt der blot er Spörgsmaal om Interpolation, kan man give hiint Udtryk en saadan Form, at det kan anvendes paa alle saakaldte *functiones inexplicabiles*. Skriver man nemlig $f(\nu)$ for W og bemærker at

$W + W't + W''\frac{t^2}{1.2} + \&c. = f(\nu+t)$ og $1 + n\nu t + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\nu^2 t^2 + \&c. = (1+\nu t)^n$ saa erholdes efter den *Parsevalske* Formel, Udtrykket

$$\frac{d^n(\nu^n f\nu)}{1.2.3\ldots n\, d\nu^n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi dz \left\{ \left(1+\nu e^{z\sqrt{-1}}\right)^n f\left(\nu+e^{-z\sqrt{-1}}\right) + \left(1+\nu e^{-z\sqrt{-1}}\right)^n f\left(\nu+e^{z\sqrt{-1}}\right) \right\}.$$

Bemærkes at $\left(1+\nu e^{\pm z\sqrt{-1}}\right)^n = e^{\pm nz\sqrt{-1}}\left(e^{\mp z\sqrt{-1}}+\nu\right)^n$, saa uddrages let heraf, i det $\nu^n f\nu$ kaldes $\varphi(\nu)$

$$\frac{d^n\varphi(\nu)}{1.2.3\ldots n\, d\nu^n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi dz \left\{ e^{nz\sqrt{-1}}\varphi\left(\nu+e^{-z\sqrt{-1}}\right) + e^{-nz\sqrt{-1}}\varphi\left(\nu+e^{z\sqrt{-1}}\right) \right\},$$

hvilket er gjeldende for alle positive Værdier af n. Heraf udledes igjen ved at udvikle $\varphi\left(\nu + e^{\pm z\sqrt{-1}}\right)$ og udföre Integrationerne:

$$\frac{d^n\varphi(\nu)}{1.2.3\ldots n\,d\nu^n} = \frac{\sin n\pi}{\pi}\left\{\frac{\varphi\nu}{n} - \frac{\varphi'\nu}{n-1} + \frac{\varphi''\nu}{1.2.(n-2)} - \frac{\varphi'''\nu}{1.2.3.(n-3)} + \&c.\right\}.$$

Men denne Formel sees let at have den Egenskab, at for enhver heel og positiv Værdie af n, alle Ledene forsvinde paa eet nær som giver $\frac{0}{0}$ hvis sande Værdie findes at være $\frac{\varphi^{(n)}\nu}{1.2.3\ldots n}$. Man kan altsaa generalisere og finde den almindelige Interpolationsformel for alle *functiones inexplicabiles,* som kun have Betydning for hele og positive Værdier af den uafhængige Störrelse x

$$\varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\left\{\frac{\varphi(0)}{x} - \frac{\varphi(1)}{x-1} + \frac{\varphi(2)}{x-2} - \frac{\varphi(3)}{x-3} + \&c.\right\}$$

hvortil, for at interpolere under forskjellige Former, kunde föies et Led, sin (πx). F(x), hvor F er en vilkaarlig Function, som blot ikke bliver uendelig for nogen heel og positiv Værdie af x.

Det vil være let at tilföie en lignende Formel for negative Værdier.

Den physiske Classe.

Etatsraad *Herholdt,* Ridder af Dannebrogen, har forelæst Selskabet Resultaterne af sine i Aaret 1830 fortsatte Undersögelser over Snogen (*coluber natrix*).

Blandt 57 voxne Individer, som han lod bringe levende hertil Staden fra Herresædet Rosenholm i Jylland, var *ikke en eneste af Hankjönnet,* men fandtes alle at være drægtige.

Han udleder heraf, at Antallet af qvindelige Snoge langt overstiger Antallet af de mandlige, og bekræfter herved Formodningen, at denne Dyrclasse lever i polygamisk Forbindelse.